УДК 517.3

М. Ю. Медведик

СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИППМАНА – ШВИНГЕРА

Аннотация. Рассмотрено решение интегрального уравнения Липпмана – Швингера. Представлен численный метод Галеркина. Получены численные результаты для расчета акустического поля внутри тела с использованием субиерархического алгоритма.

Ключевые слова: субиерархический алгоритм, интегральное уравнение, численный метод, краевая задача.

Abstract. This paper is considered solution integral equation of Lippmann – Schwinger. The integral equation is solved by Galerkin method. Numerical results of solving of are obtained by using subhierarchical algorithm by body free form.

Keywords: subhierarchical algorithm integral equations, numerical method, boundary value problem.

Введение

Определение рассеянного поля в различных материалах и средах является актуальной задачей акустики и электродинамики. Так как точные решения задач дифракции могут быть получены лишь для ограниченного числа тел правильной геометрии, то большое значение для практических приложений представляет развитие различных приближенных и численных подходов, справедливых для тел произвольной формы. Таким образом, возникает необходимость разработки новых методов решения подобных задач. Одним из перспективных методов является метод объемных сингулярных интегральных уравнений [1]. С помощью него краевая задача сводится к решению объемного сингулярного интегрального уравнения. Решение получающегося интегрального уравнения в общем случае возможно лишь численными методами, но благодаря снижению размерности задачи за счет сведения к интегралу по поверхности происходит значительное упрощение численных расчетов. Решение таких задач с приемлемой для практики точностью требует очень большого объема вычислений. Представленный в статье метод позволяет решать подобные задачи на телах сложной геометрической формы, опираясь на результаты, полученные при решении задачи на теле базовой формы [2–9].

Постановка задачи

Рассмотрим задачу дифракции акустической волны на теле Q, расположенном в свободном пространстве R^3 (рис. 1).

Пусть дано неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(x)u = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ – известная функция с компактным носителем.

Будем предполагать, что на границе раздела двух сред выполняются условия сопряжения

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial Q} = 0 \tag{2}$$

и условия излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r} = iku + o\left(\frac{1}{r}\right), \; r := |x| \to \infty. \tag{3}$$

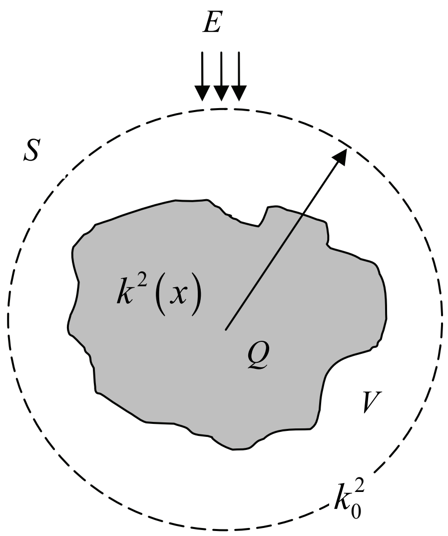

Рис. 1

Представим данное уравнение в виде (1)

$$\Delta u + k_0^2 u = \left(k_0^2 - k^2(x)\right)u + f(x), \tag{4}$$

где k_0 – волновое число в свободном пространстве; $k(x)$ – функция, характеризующая волновое число внутри тела Q.

Обозначим через $F(x) = \left(k_0^2 - k^2(x)\right)u + f(x)$ правую часть уравнения (4). Тогда, используя вторую формулу Грина, получаем

$$\int_V \left(\Delta + k_0^2\right)u(x)G(x,y) - \left(\Delta + k_0^2\right)G(x,y)u(x)dx =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n}G(x,y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}u(x)\right)ds,$$

где S – сфера, а V – ее объем (рис. 1). Учитывая, что $F(x) = \left(\Delta + k_0^2\right)$, а $\left(\Delta + k_0^2\right)G(x,y) = \delta(x)$, приходим к следующей формуле:

$$u(x) = \int_V F(x)G(x,y)dx - \int_S \frac{\partial u(x)}{\partial n}G(x,y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}u(x)ds.$$

Интеграл по поверхности S в правой части уравнения стремится к нулю при $r \to \infty$. Таким образом, задача свелась к следующему уравнению:

$$u(x) = \int_V F(x) G(x, y) dx.$$

Устремим радиус S к бесконечности и перейдем от V к R^3. Учитывая, что $F(x) = \left(k_0^2 - k^2(x)\right) u + f(x)$, получаем

$$u(x) = \int_Q G(x, y) \left(k_0^2 - k^2(y)\right) u(y) dy + \int_{R^3} f(y) G(x, y) dy.$$

Обозначим в правой части уравнения интеграл через

$$f^0(x) = \int_{R^3} f(y) G(x, y) dy.$$

В результате приходим к уравнению, известному в литературе как интегральное уравнение Липпмана – Швингера:

$$u(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) \left(k_0^2 - k^2(y)\right) u(y) dy. \tag{5}$$

Это уравнение играет чрезвычайно важную роль не только в акустических задачах дифракции, но также в электродинамике, квантовой механике и во многих других областях физики.

Для однородного тела, т.е. такого, для которого $k(x) - \text{const}$, уравнение модифицируется и принимает вид

$$u(x) = f^0(x) + k_1^2 \int_Q G(x, y) u(y) dy. \tag{6}$$

Уравнение (5) является уравнением Фредгольма второго рода. К нему применима известная теория Фредгольма. Вопросы единственности и существования решения данного уравнения рассмотрены в [10].

Метод Галеркина

Рассмотрим n-мерное пространство V_n. Проведем аппроксимацию элементов ψ элементами $\psi_n \in V_n$. Методом Галеркина находим ψ_n из системы уравнений

$$(L\psi_n, v) = (f, v). \tag{7}$$

Эти уравнения определяют конечномерный оператор $L_n : V_n \to V_n'$, где V_n' есть *антидуальное* пространство к V_n.

В качестве базисных функций выберем функции v_k^1. Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2,\ b_1 < x_2 < b_2,\ c_1 < x_3 < c_2\}$. Разобьем Q на элементарные параллелепипеды рис. 2:

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1},\ x_{2,l} < x_l < x_{2,l+1},\ x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n}k,\ x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n}l,\ x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n}m,$$

где $k, l, m = 0, ..., n-1$. Объем любого параллелепипеда Π_{klm} равен vol.

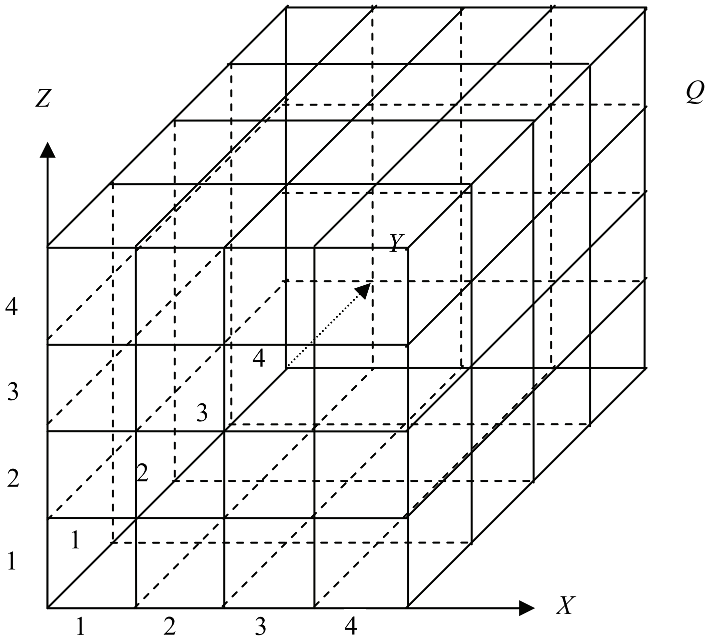

Рис. 2

Базисные функции v^i_{klm}, $i = 1, 2, 3$, определяются следующим образом:

$$v^i_{klm} = \begin{cases} 1, x \in \overline{\Pi}_{klm}, \\ 0, x \notin \overline{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации [11] в $L_2^3 = L_2 \times L_2 \times L_2$.

Описанный выше метод приводит к решению матричного уравнения. Произведем перебор всех пар элементарных параллелепипедов. Каждый элемент матрицы получается путем вычисления шестикратного интеграла $L_{i,j} = \mathrm{vol} \cdot \delta_{i,j} - \int\limits_{\Omega} G(x, y)\psi_i(x) \cdot v_j(y)ds,$ имеющего слабую особенность в области интегрирования. Процедура избавления от особенности представлена в [4, 7]. Правая часть матричного уравнения задается формулой $f_j = \int\limits_{\Omega} f\psi_j ds$. Здесь $x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)$, а $G(x, y) = \dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ – известная функция. Решение СЛАУ производится методом сопряженных градиентов.

Субиерархический алгоритм

Алгоритм расчета акустического поля внутри фигуры в форме параллелепипеда Q описан выше. Рассмотрим алгоритм расчета акустического поля для тела сложной геометрической формы. Будем предполагать, что решение задачи тела Q получено, и в нашем распоряжении находится матрица, составленная методом Галеркина. Для решения задачи дифракции акустической волны на теле сложной формы необходимо, чтобы тело целиком вмещалось в параллелепипед Q и состояло из элементов сетки [3–10]. Субиерархический метод позволяет составить матрицу для определения акустических полей внутри тела сложной конфигурации, используя матрицу, составленную для параллелепипеда Q. В построенной фигуре введем новую нумерацию элементарных параллелепипедов. Произведя полный перебор всех элементарных параллелепипедов, принадлежащих фигуре сложной конфигурации, получаем новую сетку. Эту сетку будем использовать для расчета поля на теле сложной формы. Решая СЛАУ для матрицы, составленной с использованием новой сетки, находим значения поля внутри фигуры сложной формы. Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размера фигуры и размера сетки. Субиерархический подход позволяет избежать длительных расчетов, связанных с вычислением матричных элементов.

Численные результаты

На рис. 3–5 приведен расчет значений акустического поля внутри тела сложной геометрической конфигурации. Параллелепипед Q покрыли равномерной сеткой $11\times11\times11$ элементов, используя субиерархический алгоритм, произвели расчет поля на представленной ниже фигуре. Первые четыре слоя по направлению оси OZ фигуры имеют вид, представленный на рис. 3, следующие три слоя фигуры представлены на рис. 4, последние четыре слоя изображены на рис. 5.

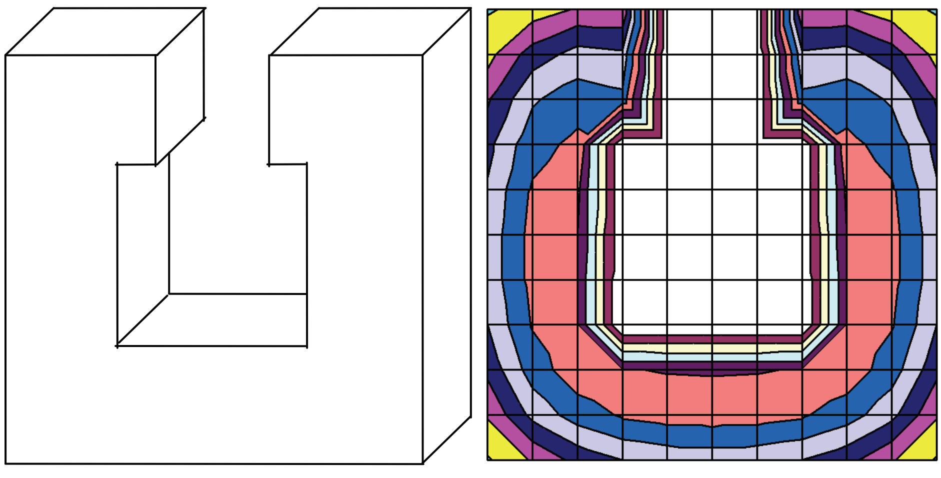

Рис. 3. Значение модуля акустического поля
во втором сечение фигуры перпендикулярно оси OZ

Преимущества субиерархического метода особенно хорошо заметны при расчете серии задач на телах различной конфигурации.

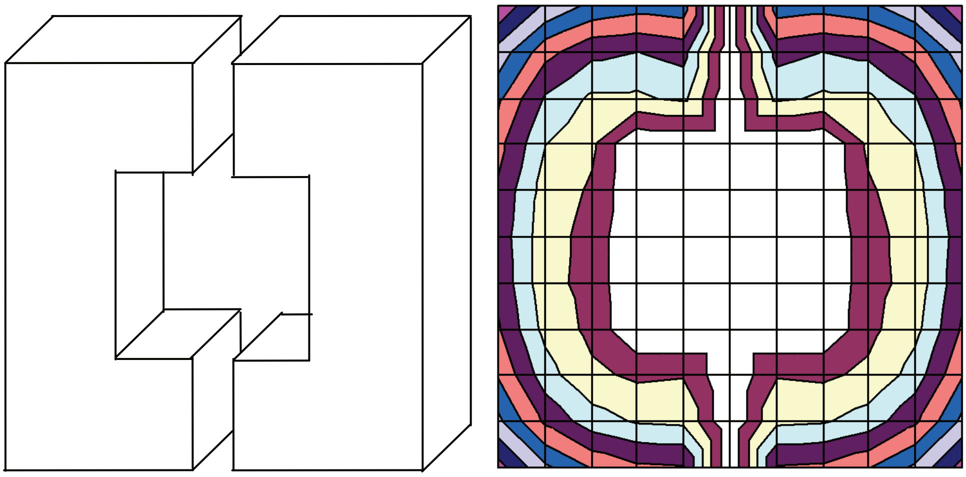

Рис. 4. Значение модуля акустического поля
в пятом сечение фигуры перпендикулярно оси *OZ*

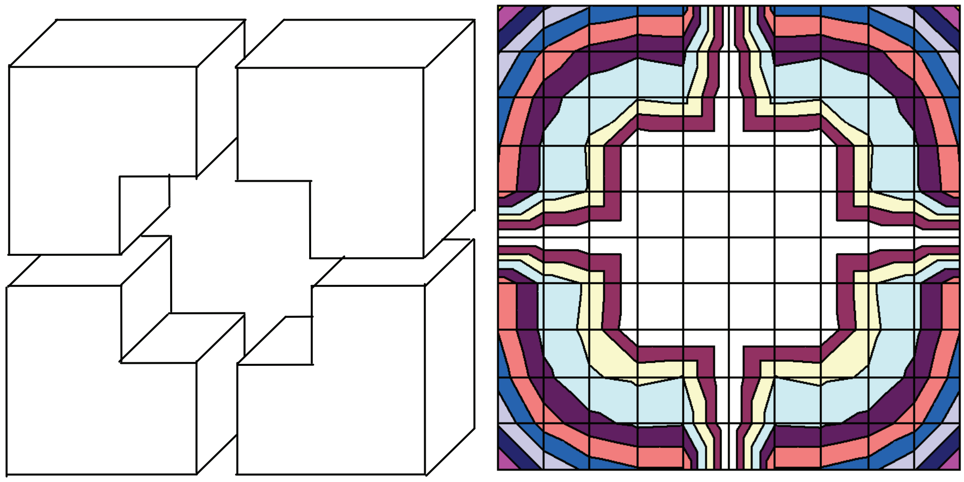

Рис. 5.Значение модуля акустического поля
в восьмом сечение фигуры перпендикулярно оси *OZ*

Список литературы

1. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998.
2. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения на плоских экранах произвольной формы / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 49–55.
3. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 4. – С. 441–446.
4. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Извес-

тия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
5. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 3–19. – (Естественные науки).
6. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический подход для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле в волноводе методом коллокации / М. Ю. Медведик, Д. А. Миронов, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.
7. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод для решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 59–71.
8. **Антонов, А. В.** Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД-технологий / А. В. Антонов, М. Ю. Медведик, Ю. Г Смирнов. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 4. – С. 51–60.
9. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
10. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987.
11. **Kress, R.** Linear Integral Equations / R. Kress // Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag. – New-York, 1989. – V. 82.

Медведик Михаил Юрьевич
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

Medvedik Mikhail Yuryevich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

E-mail: _medv@mail.ru

УДК 517.3

Медведик, М. Ю.

Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 82–88.